De la géométrie sans figure, est-ce possible ? L'exemple de la Caractéristique Géométrique de G.W.Leibniz

Thomas de Vittori

De la géométrie sans figure, est-ce possible ? L'exemple de la *Caractéristique Géométrique* de G.W.Leibniz

Thomas de Vittori

Université d'Artois – Laboratoire de Mathématiques de Lens

Introduction

Depuis les premiers écrits des mathématiciens grecs, la géométrie est la science des figures. Par cette simple expression est affirmée la relation étroite qu'entretient cette branche des mathématiques avec son objet. La polysémie du mot figure est évidente et elle fût souvent l'occasion de réflexions philosophiques sur les rapports entre les sciences et le monde sensible. Sur cette question, l'histoire de la géométrie est riche. Au 17e siècle, des penseurs comme Descartes ou Leibniz, à la fois philosophes et mathématiciens, donnent à la réflexion ontologique sur la géométrie une ampleur et une richesse indéniable. La figure est à la fois l'objet de la science mais aussi le moyen de celle-ci. La géométrie traite des figures et le discours mathématiques s'appuie sur des figures pour convaincre. Ce double statut, objet et outil, est au cœur des travaux de recherche qu'entreprend Leibniz entre 1679 et environ 1693-1694. À plusieurs reprises, le philosophe interroge la place de la figure dans la géométrie. Mêlant forme et fond, les écrits scientifiques de Leibniz de cette période présentent alors un jeu subtil où aucun aspect ne prend jamais vraiment le dessus sur l'autre, et ce, contrairement au souhait de l'auteur.

Leibniz mathématicien

Entre 1672 et 1676, Leibniz séjourne à Paris et à cette occasion il rencontre de nombreux savants. En particulier, il y croise Huygens qui entreprend d'initier le jeune philosophe à la géométrie. Avant son arrivée à Paris, les connaissances de Leibniz sur le sujet étaient quasiment nulles et Huygens commence par lui prodiguer quelques conseils de lectures. Les livres proposés comprennent la *Géométrie* de Descartes, que Leibniz ne consultera qu'en 1674, et un certain nombre d'autres traités, en particulier des écrits de Pascal dont *L'introduction à la géométrie*, un ouvrage aujourd'hui perdu mais dont on connaît une partie du contenu par l'intermédiaire des notes prises par Leibniz. À cela s'ajoutent quelques écrits de Desargues, pour ne citer que ceux qui ont plus ou moins contribuer à la naissance d'un projet de recherches géométriques chez Leibniz. Dès le départ, Leibniz n'est pas satisfait du genre de géométrie qu'il a entre les mains car, excepté chez Pascal et Desargues, il s'agit d'une géométrie très analytique qui ne répond pas à ses attentes.

Avant tout philosophe, le travail de Leibniz s'inscrit dans une thématique générale qui cherche à réfléchir sur ce que serait une pensée juste. Au cours de l'année 1679, Leibniz rédige un ensemble de textes qui permettent de situer son projet.

> *Les Méthodes Géométriques auxquelles je songe sont au nombre de deux ; la première consiste à exprimer complètement une figure en n'utilisant que des caractères, sans l'aide d'explications verbales et sans y adjoindre de figure ; la seconde consiste à le faire en n'utilisant que des mots, sans l'aide d'aucun autre caractère et sans l'aide d'aucune figure.* (Leibniz, *la Caractéristique Géométrique*, [CG] p.47)

Leibniz crée une dichotomie entre deux manières de penser la géométrie. Il détaille ensuite ces deux possibilités et les critiques qu'on peut adresser à ces démarches tout aussi insatisfaisante l'une que l'autre. Sur la méthode verbale, qui consiste à discourir en géométrie avec la langue usuelle, il note qu'elle *a pour effet de mettre toujours dans l'esprit l'idée de l'objet étudié*, ce qui est un avantage. En effet, de la même manière que celui qui parle d'un chat a l'idée de chat, quiconque parle d'un triangle en a l'idée également. Tant que le discours se poursuit, l'objet reste bien défini, ce qui permet au géomètre *de lui donner conscience d'avancer par degrés d'une vérité nouvelle à l'autre*. Le cheminement de la pensée est ainsi relativement limpide mais *l'emploi de termes de la langue ordinaire dans cette méthode a cet inconvénient d'exposer les connexions, les transitions et les inférences, à diverses ambiguïtés*. Le problème est bien connu; la logique de la langue est loin de coïncider avec la logique mathématique. Pour Leibniz, la piste d'une solution réside dans une deuxième méthode, celle des caractères, car ceux-ci *sont très simples et ne s'appuient, en dehors des lettres, que sur quelques symboles comme congruence, égalité, rapport, proportion, similitude, coïncidence*. Les difficultés de la langue verbale semblent résolues par les caractères, mais ce n'est qu'une apparence. Pour Leibniz, *l'inconvénient de la méthode caractéristique est qu'au cours d'une opération, en d'autres termes, dans un calcul, l'esprit n'a pas l'idée de l'objet qu'il est en train d'étudier*. À ce moment, Leibniz a en tête la géométrie de Descartes et Viète pour laquelle, après de longues pages de calculs, la nature de l'objet considéré au départ peut être perdue de vue. Quelle est alors la solution ? Pour trouver une réponse à ce problème, Leibniz se place un cadre général. Il explique que *si on disposait d'une langue philosophique,* c'est-à-dire une langue dont à la fois les termes seraient parfaitement clairs et qui présenterait les connexions entre ces termes, *elle rassemblerait tous les avantages de tous les caractères*. Il est à noter que même Leibniz considère cela comme un projet, un but à atteindre, car une telle langue philosophique est sans doute à jamais inaccessible aux hommes. Leibniz précise ensuite les liens entre cette idée de langue philosophique et la géométrie.

> *Il est impossible de formuler exactement un problème en n'utilisant que des figures sans aucun mot ni aucun caractère car beaucoup de choses ne peuvent pas être dessinées. Le pourraient-elles, la figure devient souvent trop embrouillée et sa complexité trop grande pour ne pas semer la confusion dans l'esprit de celui qui la contemple.* (Leibniz [CG] p.49)

Un reproche fait à l'utilisation des figures en géométrie est que dès qu'on essaie d'y faire entrer toutes les données, la situation devient rapidement inexploitable visuellement. Bien qu'importante, cette limitation n'est pas la plus grosse difficulté. La critique la plus profonde est adressée à la démarche analytique.

> *On ne voit pas encore dans l'Analyse Géométrique une discipline achevée. Même si en effet la méthode de Viète et de Descartes permettait d'y faire presque tout par le calcul, en faisant la supposition des Eléments, ce sont eux qui, pour la plupart, n'y ont pas encore été réduits.* (Leibniz [CG] p.51)

Pour Leibniz, l'une des limites de la géométrie analytique est qu'elle présuppose déjà la géométrie d'Euclide. En effet, pour travailler selon la méthode cartésienne, il est nécessaire de poser des grandeurs ainsi que des relations entre ces grandeurs et pour cela, il faut admettre bon nombre de résultats des *Éléments* d'Euclide (en particulier l'existence de segments, de droites, etc.). Cette dépendance aux *Éléments* rend cette géométrie caduque car elle ne contient pas ses propres fondements. Pour Leibniz une géométrie doit être capable de tout démontrer depuis le début, et c'est là son projet.

> *J'ai déjà songé à palier ce défaut en tâchant de faire apparaître dans un calcul tout ce qui concerne la figure et la situation, ce qui est nouveau : les Analystes se contentent d'y faire entrer les grandeurs en supposant les situations connues à partir de la figure, ils ne peuvent donc se dispenser de tracer des lignes et des figures et de mettre à contribution l'imagination.* (Leibniz [CG] p.51-53)

La géométrie analytique n'est pas achevée en ce sens qu'elle ne peut pas se dispenser d'une partie figurée. L'élaboration de la nouvelle géométrie qu'il nomme *caractéristique géométrique* repose sur l'utilisation exclusive de caractères. Le but, et c'est ce qui est nouveau, est que ces caractères doivent concerner la figure mais aussi la situation, c'est-à-dire les relations qu'entretiennent les figures les unes avec les autres.

Définition et rôle des caractères

Dans un premier temps, Leibniz commence par définir la brique élémentaire de son système, c'est-à-dire le caractère.

> *Les Caractères sont des objets exprimant les relations entre d'autres objets, plus faciles à manier qu'elles. À toute opération sur les caractères correspond donc une proposition portant sur les objets et avant de considérer ceux-ci nous pouvons souvent attendre d'avoir achevé l'opération.* (Leibniz [CG] p.143)

Il s'agit déjà d'associer aux objets des caractères sur lesquels on pourra ensuite travailler.

> *Les Caractères Algébriques en effet n'expriment pas tout ce qu'il y a dans l'espace, ne représentent pas directement et en elle-même la situation des points et ne l'atteignent qu'au terme d'un grand circuit passant par les grandeurs.* (Leibniz [CG] p.145)

Comme Leibniz l'a déjà fait remarquer dans ses études préliminaires, même avec un système de coordonnées, les caractères algébriques ne nous renseignent pas sur la manière dont les points se situent les uns par rapport aux autres. Dans chaque cas, il faut travailler sur ces données pour pouvoir obtenir ce genre d'information. Leibniz aimerait avoir un accès direct afin que le symbole même exprime de manière claire la situation des objets. Leibniz remarque que *le seul fait de symboliser les points d'une figure par des lettres suffit à en manifester certaines propriétés.* Si par exemple, on écrit A et plus loin B, on construit déjà une éventuelle distinction entre les deux. Il peut s'agir du même objet, mais ainsi posé, si la lettre n'est pas la même, il se peut que ces deux points soient différents. Donc il y a création de quelque chose. Leibniz poursuit :

[...] j'en suis venu à me demander si toutes les relations liant les points de chaque figure ne pouvaient pas être symbolisées par elles en sorte que la figure soit complètement représentée par une caractéristique et que des résultats qu'on obtient à grand-peine en traçant des lignes embrouillées, quand on les obtient, on les découvre simplement en combinant et en transposant des lettres. (Leibniz [CG] p.147)

Le cœur du projet est de créer un nouveau calcul, qui ne soit pas un calcul sur les grandeurs, mais un calcul géométrique dont l'élaboration nécessite une remise à plat de l'ensemble de la géométrie.

Élaboration des notations

Avant d'entrer dans le détail de l'élaboration du système, il est important de rappeler qu'il s'agit d'un ensemble de texte que Leibniz n'a pas édité sous forme d'ouvrage. Ces travaux d'un savant à l'œuvre sont avant tout un processus. Leibniz est en train d'élaborer une théorie et les notations vont changer à plusieurs reprises. Ce qui suit est un exemple issu des premiers travaux de 1679.

∞ signifie identique, par exemple A∞B signifie que les points A et B coïncident, en d'autres termes qu'ils sont en même temps dans le même lieu.
γ signifie congru, c'est-à-dire pouvant occuper le même lieu en gardant la situation de ses parties.
Π signifie égale, c'est-à-dire ce qu'on peut rendre congru, après modification de la situation des parties si nécessaire. +a+b Π c signifiera que c est le tout, a, b les parties. (Leibniz [CG] p.117)

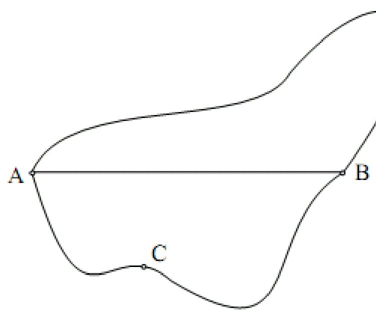
Après la définition de l'identité, de l'égalité et de la congruence, cette dernière étant amenée à jouer un rôle fondateur dans la suite, Leibniz introduit un nouveau symbole qui représente la relation dans toute sa généralité.

A.B. représentera la relation entre A et B. De la même manière, A.B.C. la relation entre A, B, C. (Leibniz [CG] p.117)

Noté A.B., parfois A.B, ce simple point vise à éclairer la situation de l'ensemble des objets. À ce stade, on remarque l'absence de figures ce qui est évidemment l'une des caractéristiques de son projet. L'objet fondamental est la relation. Comment alors rendre compte, dans un calcul, d'une relation géométrique entre deux objets eux aussi géométriques ? Pour expliciter un peu son propos, Leibniz revient aux objets les plus simples que sont les points.

> *A.B représente la situation mutuelle des A et B, c'est-à-dire un extensum (rectiligne ou curviligne, peu importe) qui les relie et demeure le même tant que cette situation ne varie pas.* (Leibniz [CG] p.235)

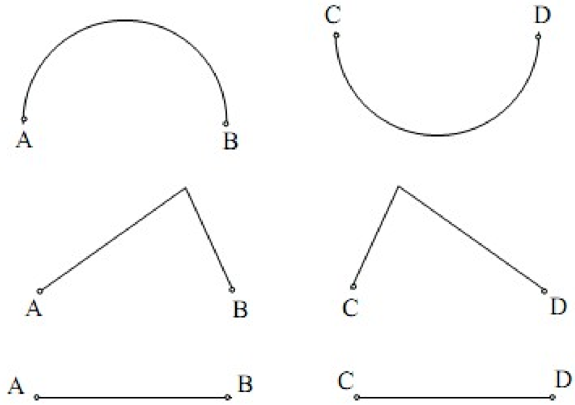
La relation entre A et B naît de ce que le philosophe appelle la coexistence de deux points qui permet, par exemple, de concevoir l'espace entre les deux. Leibniz propose comme représentation une étendue unidimensionnelle, une ligne qui relie les points A et B.



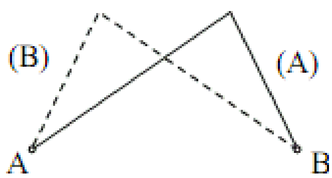
> *De la même façon A.B.C représente la situation mutuelle des trois points A, B, C (un extensum rigide qui les relie). On peut considérer qu'on poursuit ainsi pour un plus grand nombre de points.* (Leibniz [CG] p.235)

Ainsi, les points sont reliés entre eux par des morceaux d'étendue. Les définitions proposées par Leibniz semblent convenir pour les points, mais peut-on vraiment construire une géométrie sur ces bases ? Pour poursuivre l'échafaudage, il faut revenir au deuxième symbole proposé qui est la congruence

> *A.B γ C.D signifie que la relation entre les points A et B est la même qu'entre les points C et D. En d'autres termes, l'extensum reliant A et B, mais aussi bien tout autre extensum qui lui soit congru, peuvent également relier C et D.* (Leibniz [CG] p.237)



Dans tous les exemples proposés, la relation entre A et B (*A.B*) est congrue (γ) à la relation entre C et D (*C.D*). La relation entre A et B, peut servir de relation entre C et D, et réciproquement. De la même manière, il y a une forme de symétrie car A.B c'est aussi B.A.



La structure devient mathématiquement intéressante et une première conclusion s'impose.

> *Toutes ces congruences permettent de définir différentes espèces d'extensa, à savoir de Lieux de Points, dont je noterai les points invariables par les premières lettres de l'alphabet A, B ou C, et les points variables par les dernières, X, Y, ou Z.* (Leibniz [CG] p.241)

A, B et C sont les données, par exemple les points d'un problème géométrique et les points X, Y, Z sont les points variables. Il reste à voir comment définir les figures à partir de ces ensembles de points, c'est-à-dire déterminer des lieux géométriques.

> *Le lieu le plus simple, mais aussi le moins limité, est celui de tous les points congrus à un point donné, puisque c'est le lieu de tous les points en général, soit l'espace infini, n'importe quel point de l'univers étant congru à un autre point donné. Supposons la congruence A γ Y, le lieu de tous les Y sera l'Espace infini.* (Leibniz [CG] p.243)

Le lieu le plus simple consiste en un point invariable A et une relation entre ce point et un point Y variable. D'après les définitions de Leibniz, AγY, c'est-à-dire l'ensemble des points congrus à A, n'est rien de moins que l'espace tout entier. Leibniz propose donc une formule pour l'espace. Ce résultat est prometteur pour la mise en place d'une géométrie. Dans le même texte, Leibniz poursuit.

> *Le lieu suivant le lieu de tous les points est celui de toutes les régions sphériques, c'est-à-dire le lieu de tous les points ayant la même situation à l'égard d'un point donné. Soit par exemple la congruence A.Y γ A.(Y), le lieu de tous les Y sera sphérique*
>
> *En prenant sur cette même surface sphérique un point B constant, on peut exprimer le même lieu par A.B γ A.Y.* (Leibniz [CG] p.243)

Pour élaborer le lieu suivant, et donc un nouvel objet, Leibniz considère une première relation A.Y fixée et A.(Y) où (Y) intervient comme une deuxième variable. Comme Y est variable, on a ainsi l'ensemble des sphères de centre A, ou plus exactement l'ensemble des surfaces sphériques. Si ensuite on fixe la relation A.Y en une relation A.B, la relation A.BγA.Y détermine une sphère. De la même manière, par les relations A.XγB.X et A.B.CγA.B.Y Leibniz définit un plan, respectivement un cercle. Désormais, pour Leibniz, l'espoir est grand d'atteindre tous les *Éléments* d'Euclide. Malheureusement il va se heurter à un certain nombre d'autres objets, dont la droite. Après de nombreux essais, il n'obtiendra pas avec son calcul de définition satisfaisante. Au mieux, la définition de la droite fait intervenir deux congruences, ce qui dérange Leibniz car la droite devrait être un objet simple.

À l'issue de ces réflexions, en dehors des difficultés concernant la droite, Leibniz réussit à construire les objets principaux, ce qui pour lui est plus ou moins suffisant. Il sait qu'il est sur le chemin du programme de cette caractéristique géométrique, premier pas vers une langue philosophique. Leibniz a selon lui les atouts pour convaincre la communauté scientifique, mais cette dernière est-elle prête à entendre ? Huyghens, malgré l'estime qu'il porte à Leibniz, n'est pas aussi enthousiaste. Une des raisons est peut-être que le seul résultat, obtenu après des pages et des pages de recherche, n'est rien d'autre que la définition d'un cercle. Seul le Marquis de L'Hôpital semble conquis, mais cela ne suffira pas et les idées sur la caractéristique géométrique ne diffuseront pas. Les travaux de Leibniz ne seront valorisés qu'après sa mort, principalement à la suite de l'édition de la correspondance de Huyghens et d'un concours gagné en 1833 par

Grassmann qui rapproche les théories sur la caractéristique géométrique de ses propres travaux sur les espaces abstraits.

Au cœur du texte

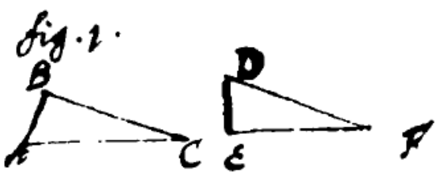
Nous l'avons dit, les travaux de Leibniz sur la caractéristique géométrique n'ont jamais fait l'objet d'une publication de la part de son auteur. Les différentes réflexions se trouvent réparties dans un ensemble de lettres, pour l'essentiel adressées à Huyghens mais aussi à quelques autres savants comme le Marquis de L'Hôpital que nous avons déjà cité. Publiée dès le début du 19e siècle, cette correspondance nous permet d'accéder aisément à ces écrits. Les textes manuscrits de Leibniz sont souvent très difficiles à déchiffrer et la mise à disposition d'ouvrages comme les œuvres complètes de Huyghens publiées en 1899 à La Haye par la Société Hollandaise des Sciences facilite la lecture tout en étant respectueux de la forme des écrits. Essentielles dans certaines recherches, les éventuelles divergences par rapport aux manuscrits n'auront, pour notre question sur les liens entre texte et figure, pas d'influence notable, car seule leur présence, ou leur absence, nous intéresse.

À la lecture des pages rédigées par Leibniz à destination de Huyghens, on remarque immédiatement que le texte est assez richement illustré de figures. Qu'un texte de géométrie comporte des figures n'est pas exceptionnel en soi, mais leur présence dans le contexte du projet leibnizien d'une géométrie sans figure interpelle. Les extraits reproduits ci-après (fig.1 et fig.2) portent sur les premiers développements que nous avons présentés dans les paragraphes précédents. Pour chaque construction d'objet, Leibniz ajoute une figure pour illustrer son propos. Il y a ici six figures qui éclairent la notion de congruence, la formule pour l'espace et les premiers objets comme les sphères ou les cercles. Alors que l'objectif est la mise en place d'une géométrie sans figure, quel peut être ici leur rôle ? La première piste est liée à la nature de l'écrit et à sa visée. Outre le respect pour les qualités scientifiques de son correspondant, Leibniz n'écrit pas à Huyghens seulement pour avoir un échange productif entre savants sur une théorie naissante, ses vues sont également politiques. Christiaan Huyghens est un homme influent à Paris et Leibniz cherche à obtenir son soutien pour sa candidature à l'Académie des Sciences. Pour Leibniz, cette nouvelle géométrie est un projet qu'il pense suffisamment brillant pour postuler à cette haute distinction. Ce n'est pas l'avis de Huyghens qui suggère plutôt à Leibniz de détailler ses travaux en chimie sur le vif-argent, c'est-à-dire le mercure. Ainsi, dans la plupart des courriers, Leibniz commence par une première partie sur ses travaux chimiques et ce n'est que dans une deuxième partie qu'il évoque ses recherches géométriques en priant son lecteur d'y jeter un oeil avisé. Le philosophe cherche donc à convaincre et pour ce faire il doit avant tout expliquer et expliciter ses résultats à un lectorat qui n'est, en général, pas sur le même type de recherches. Malheureusement pour lui, Leibniz n'obtiendra jamais le poste escompté et comme nous l'avons vu, ses travaux resteront lettre morte jusqu'à leur redécouverte au 19e siècle. La fonction didactique des figures n'est toutefois pas la seule interprétation de leur présence. Leur rôle est aussi de démontrer, au sens mathématique, la pertinence de la théorie. Comme Leibniz l'annonçait, la caractéristique géométrique doit permettre de reconstruire la géométrie et ce depuis ses premiers objets. Ainsi, plus qu'une simple illustration, les figures que propose Leibniz sont aussi des preuves de la portée scientifique de son travail. La nouvelle théorie permet de reconstruire l'ancienne, elle répond donc au cahier des charges que Leibniz s'était fixé dès le départ. Les figures donnent ainsi la possibilité de saisir en quoi elles sont inutiles. Dans ses derniers travaux, Leibniz s'achemine vers une disparition totale des figures et offre des pages dans lesquelles il expose une géométrie de type combinatoire où seuls les caractères interviennent. Il s'approche ainsi de cette langue géométrique parfaite, par essence inaccessible, mais que, selon lui, on peut, et même doit, tenter de maîtriser.

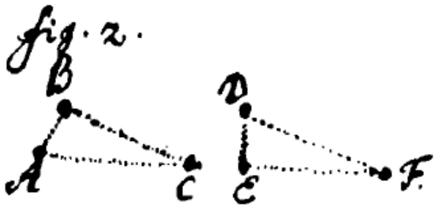
Conclusion

Une géométrie sans figure est-elle possible ? L'histoire des mathématiques répond par l'affirmative à cette question. À la suite des premiers travaux entrepris au 17e siècle, et après l'essor des géométries non-euclidiennes, cette discipline est devenue, dans sa définition moderne, l'étude de structures algébriques, notamment les groupes et leurs invariants. Toutefois, pour se détacher des intuitions sensibles liées aux figures, la géométrie a dû subir une refonte épistémologique profonde. Autrefois science des figures, elle deviendra successivement science des relations entre les figures puis finalement science de l'espace. C'est ainsi dans l'évolution des liens entre les objets géométriques et la notion d'espace que transparait une nouvelle conception de cette branche des mathématiques. Les nouvelles définitions de l'espace, qui résultent de l'élaboration d'axiomatiques variées et désormais libérées de toute attache sensible, sont en germe dans les travaux de penseurs comme Leibniz. Il n'est bien entendu pas le seul, nous pourrions citer Desargues pour les géométries projectives, Euler, ou encore Klein et sa brillante synthèse qui sera baptisée ensuite *Programme d'Erlangen*, et bien d'autres de nos jours, Connes, Tits, … Les grands mathématiciens sont nombreux, mais Leibniz fait partie de ces rares penseurs qui vont jusqu'au bout, jusqu'aux fondements d'une discipline souvent considérée comme reine. Cette tradition qui s'étend d'Euclide à Hilbert, en passant par Ibn al-Haytham, constitue, selon nous, l'une des grilles de lecture importante de l'histoire de la géométrie.

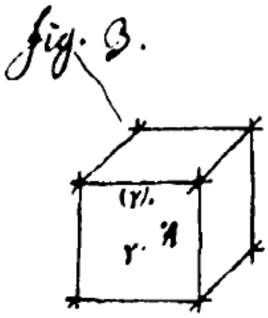
Or il eſt conſtant qu'il n'y a rien de plus important dans la Geometrie que la conſideration des lieux : c'eſt pourquoy j'en exprimeray quelques uns des plus ſimples par cette maniere de caracteres. Les lettres de l'Alphabet ſignifieront ordinairement les points des figures. Les premiers lettres comme A. B. exprimeront les points donnés; les derniers, comme X. Y les points demandés. Et au lieu qu'on ſe ſert des égalités ou equations dans l'algebre, je me ſers icy des congruités que j'exprime par ce caractere : 8 . par exemple dans la premiere figure ABC 8 DEF



veut dire qu'il y a de la congruite entre les deux triangles ABC et DEF ſuivant l'ordre des points; qu'ils peuuent occuper exactement la même place, et qu'on peut appliquer ou mettre l'un ſur l'autre ſans rien changer dans ces deux figures que la place ainſi en appliquant D ſur A, et E ſur B. et F ſur C les deux triangles (eſtans poſés égaux et ſemblables) ſeront manifeſtement coincidents. Mais ſans parler des triangles, on en peut dire autant en quelque façon des points ſçavoir ABC. 8 DEF dans la ſeconde figure; c'eſt à dire on pourra mettre en meſme temps A ſur D et B ſur E et C ſur F. ſans que la ſituation des trois points ABC entre eux ny des trois points DEF entre eux ſoit changée ſuppoſant les trois premiers joints par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes, n'importe:) et les trois autres de même : apres cette explication des caracteres, voicy les lieux.



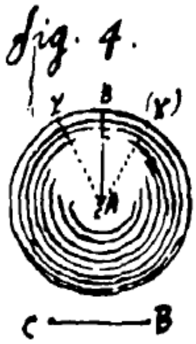
Soit A 8 Y dans la fig. 3. c'eſt a dire ſoit un point donné A. on demande le lieu de tous les point Y ou (Y) etc. qui ont de la congruite avec le point A. je dis que le lieu de tous les Y ſera *l'eſpace infini* de tous coſtés, car tous les points du monde ont de la congruité entre eux : C'eſt à dire l'un ſe peut touſjours mettre à la place de l'autre. Or tous les points du monde ſont dans un même eſpace. On peut auſſi exprimer ce lieu ainſi : Y 8 .(Y). tout cela eſt trop manifeſte, mais il falloit commencer par le commencement.

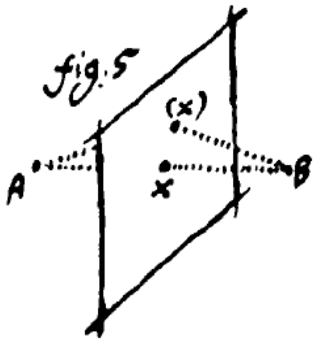


Soit (dans la figure 4) A. Y. 8 A. (Y) le lieu de tous les Y. ſera la ſurface de la ſphere dont le centre eſt A et

fig. 1

Œuvres Complètes de Christiaan Huyghens, Tome 8, Correspondances 1676-1684, Société Hollandaise des Sciences, 1899, p.221

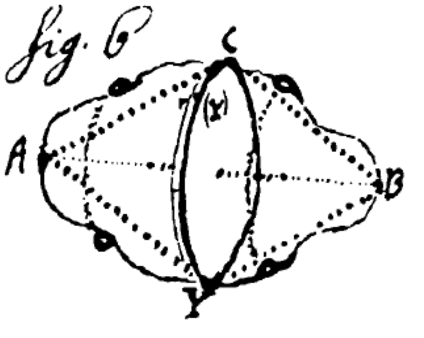




le rayon AY touſjours le meme en grandeur ou égal à la donnée AB ou CB c'eſt pourquoy on peut auſſi exprimer le meſme lieu ainſi A.B 8 AY ou C.B. 8 A.Y.

Soit (dans la 5 figure) A.X. 8 B.X. le lieu de tous les X ſera le plan deux points A et B eſtant donnés, on demande un troiſieme X qui ait la meſme ſituation à l'egard du point A, qu'il a à l'égard du point B. [c'eſt a dire que A.X ſoit egale ou (par ce que toutes les droites egales ſont congruentes) congruente à B.X. ou que le point B ſe puiſſe appliquer au point A gardant la meſme ſituation qu'il avoit à l'égard du point X] je dis que tous les points X. (X) d'un certain plan ſeul continué à l'infini ſatiſferont à la queſtion car comme A.Y[2]) 8 B.Y[2]). de meſme A. (Y)[2]) 8 B(Y)[3]). Mais il n'y en aura point qui ſatiſfaſſe hors de ce plan. C'eſt pourquoy ce plan continué à l'infini ſera le lieu commun de tous les points du monde qui ſont ſitués à l'egard de A comme à l'egard de B [il s'en ſuit que ce plan paſſera par le milieu de la droite AB, qui luy eſt perpendiculaire].

Soit dans la 6 fig. A. B. C. 8 ABY le lieu de tous les Y ſera la circulaire. C'eſt à dire il y a trois points donnés, A.B.C. on demande un quatriême Y qui a la même ſituation que C. à l'egard de A.B. je dis qu'il y a une infinité de points qui



peuuent ſatiſfaire et le lieu de tous ces points eſt la circulaire. Cette deſcription ou definition de la ligne circulaire ne preſuppoſe pas le plan, (comme celle d'Euclide) ny mémes la droite. Cependant il eſt manifeſte que ſon centre eſt D au milieu entre A et B. on pourroit auſſi dire ainſi. A.B.Y. 8 .A.B.(Y) car alors le lieu feroit un cercle mais qui ne feroit pas donné. C'eſt pourquoy il faut adjouter un point donné l'on ſe peut imaginer que les points AB demeurant fixes et que le point C. attache à eux par quelques lignes inflexibles (*droites ou courbes*) et par conſequent gardant la même ſituation à leur egard ſoit tourné à l'entour de A.B pour décrire la circulaire C.Y. (Y) On peut juger par là que la ſituation d'un point à l'egard d'un autre peut eſtre conçue ſans exprimer la ligne droite pour veu on les conçoiue joints par quelque ligne que ce ſoit. Et ſi la ligne

fig. 2

Œuvres Complètes de Christiaan Huyghens, Tome 8, Correspondances 1676-1684, Société Hollandaise des Sciences, 1899, p.222

Bibliographie

BARBIN E., CAVEING M. dir.(1996), *Les philosophes et les mathématiques*, IREM, Ellipses.

BELAVAL Y. (1993), *Leibniz, initiation à sa philosophie*, Vrin.

BELAVAL Y (1960), *Leibniz, critique de Descartes*, Gallimard.

BOI L. (1995), *Le problème mathématique de l'espace*, Springer Verlag.

DE RISI V. (2007), *Geometry and Monadology Leibniz's Analysis Situs and Philosophy of Space,* Science Networks. Historical Studies, Vol. 33, Birkhäuse.

GRANGER G.G. (1999), *La pensée de l'espace*, Odile Jacob.

GRAY J. (1979), *Ideas of Space*, Oxford Science Publications.

HUYGHENS C. (1899), *Œuvres Complètes de Christiaan Huyghens*, Tome 8, *Correspondances 1676-1684*, Société Hollandaise des Sciences.

ITARD J. (1984), *Essais d'histoire des mathématiques*, Blanchard.

JAMMER M. (1993), *Concepts of space*, Dover.

LEIBNIZ G.W. (1995), *La caractéristique géométrique*, Vrin.

LEIBNIZ G.W. (1989), *Œuvre mathématique*, Albert Blanchard.

PASCAL B. (1963), *Œuvres complètes*, Seuil.

PASCAL B. (1955), *De l'esprit géométrique*, document électronique, BNF-Gallica, Aubier.